

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

1) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ -4x - 2y - z = 0 \\ 2x + z = -2 \end{cases}$$

con il metodo di Cramer e confrontare che la soluzione trovata è esatta utilizzando il metodo della matrice inversa.

Metodo di Cramer

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{3} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 0 - 4 + 0 + 4 = -8 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \det A = -8$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è diverso da zero, ne segue che il sistema dato, secondo il Teorema di Cramer, ammette una ed una sola soluzione ricavabile dalle ben note formule di Cramer. Precisamente risulta:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

avendo indicato con:

Δ il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema, ovvero il $\det A$;

Δ_x il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti;

Δ_y il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti;

Δ_z il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della z con la colonna dei termini noti.

Ma allora segue:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} \overset{N}{1} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 0 + 4 + 0 - 0 = 4 \Rightarrow \Delta_x = 4$$

Prof.ssa Daniela Tondini

I Parziale - Compito A

02/05/2006

A.A. 2005 – 2006

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{3} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_y = \begin{vmatrix} \overset{x}{3} & \overset{N}{1} & \overset{z}{-1} \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 8 + 0 - 6 + 4 = -12 \Rightarrow \Delta_y = -12$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{3} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_z = \begin{vmatrix} \overset{x}{3} & \overset{y}{1} & \overset{N}{1} \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 0 + 4 - 0 - 8 = 8 \Rightarrow \Delta_z = 8$$

Quindi si ha:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{4}{-8}, \frac{-12}{-8}, \frac{8}{-8} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right)$$

cioè:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right)$$

Metodo della matrice inversa

Poiché, per quanto visto precedentemente, risulta $\det A = \Delta = -8 \neq 0$, segue che la matrice A ammette l'inversa A^{-1} che occorre ora determinare con uno dei due metodi ben noti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa di A utilizzando il metodo dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici A^* . Risulta:

$$\begin{array}{lll} c_{11} = + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; & c_{12} = - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; & c_{13} = + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4; \\ c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; & c_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & c_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \\ c_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3; & c_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7; & c_{33} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$X = A^{-1}N \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + 0 - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} - 0 + \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione trovata, operando sia con Cramer che con la matrice inversa, è la medesima.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

2) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - 8z = 2 \\ x + y + 8z = 10 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 96 - 24 - 16 + 24 + 16 - 96 = 0 \Rightarrow \Delta = \det A = 0$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è uguale a zero, ne segue che il sistema dato non è risolubile utilizzando il Teorema di Cramer, motivo per cui bisogna andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3 \Rightarrow \det A = \Delta = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$$

Poiché:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0; \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

ne segue che è:

$$r(A) = 2$$

in quanto esiste un minore del secondo ordine, estraibile da A , diverso da zero.

Occorre ora controllare il rango della matrice completa, ottenuta dalla matrice A con l'aggiunta della colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Precisamente:

$$M' = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 120 + 6 + 4 - 6 - 4 - 120 = 0$$

Poiché entrambi i minori orlati del terzo ordine sono nulli, ne segue proprio che:

$$r(AN) = 2$$

cioè:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Dunque il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 3$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y e z) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da un unico parametro.

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella seconda e nella terza equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ x + y + 8z = 10 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , e non quelli della z , bisogna considerare come parametro proprio l'incognita trascurata, cioè la z . Ne segue, quindi, posto $z = t$ parametro reale:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 + 8t \\ x + y = 10 - 8t \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 + 8t & 6 \\ 10 - 8t & 1 \end{vmatrix} = 2 + 8t - 6(10 - 8t) = 2 + 8t - 60 + 48t = 56t - 58 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 56t - 58$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 + 8t \\ 1 & 10 - 8t \end{vmatrix} = 4(10 - 8t) - (2 + 8t) = 40 - 32t - 2 - 8t = -40t + 38 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = -40t + 38$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

da cui si ricava:

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{56t - 58}{-2}, \frac{-40t + 38}{-2} \right) = (-28t + 29, 20t - 19)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà

$$(x, y, z) = (-28t + 29, 20t - 19, t)$$

con t parametro reale ($t \in \mathbb{R}$).

3) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 3y + z - 6w = 0 \\ x + 3y - 3z - 6w = 0 \\ 3x + 2y - z - 3w = 6 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, osservare che il sistema dato è rettangolare (il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite): è, infatti, 3×4 (3 equazioni e 4 incognite). Bisogna allora andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 27 + 2 - 9 + 6 - 3 = 20 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

poiché esiste un minore orlato del terzo ordine diverso da zero.

Consideriamo adesso la matrice completa ottenuta da A aggiungendo ad essa la colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Occorre determinare ora il rango di AN . Si può subito affermare che è

$$r(AN) = 3$$

in quanto è sempre possibile utilizzare il Teorema degli Orlati: in base, infatti, alle considerazioni effettuate per la matrice A , ne segue che anche in AN esiste un minore del terzo ordine, orlato del minore del secondo ordine considerato a priori, diverso da zero, precisamente M' . Dunque:

$$r(A) = r(AN) = r = 3$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Ne segue che il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 4$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y , z e w) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da un unico parametro.

Poiché il minore diverso da zero:

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 27 + 2 - 9 + 6 - 3 = 20 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite x , y e z che figurano nelle tre equazioni, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x - 3y + z - 6w = 0 \\ x + 3y - 3z - 6w = 0 \\ 3x + 2y - z - 3w = 6 \end{cases}$$

ovvero a se stesso.

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x , della y e della z e non quelli della w , bisogna considerare come parametro proprio l'incognita trascurata, cioè la w . Ne segue, quindi, posto $w = t$ parametro reale:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 6t \\ x + 3y - 3z = 6t \\ 3x + 2y - z = 6 + 3t \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 27 + 2 - 9 + 6 - 3 = 20 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 20$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6t & -3 & 1 \\ 6t & 3 & -3 \\ 6 + 3t & 2 & -1 \end{vmatrix} = -18t + 9(6 + 3t) + 12t - [3(6 + 3t) - 36t + 18t] =$$

$$= -18t + 54 + 27t + 12t - 18 - 9t + 36t - 18t = 30t + 36 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 30t + 36$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6t & 1 \\ 1 & 6t & -3 \\ 3 & 6+3t & -1 \end{vmatrix} = -6t - 54t + 6 + 3t - 18t + 18 + 9t + 6t = -60t + 24 \Rightarrow \Delta_y = -60t + 24$$
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6t \\ 1 & 3 & 6t \\ 3 & 2 & 6+3t \end{vmatrix} = 18 + 9t - 54t + 12t - 54t - 12t + 18 + 9t = -90t + 36 \Rightarrow \Delta_z = -90t + 36$$

da cui si ricava:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{30t+36}{20}, \frac{-60t+24}{20}, \frac{-90t+36}{20} \right) = \left(\frac{15t+18}{10}, \frac{-30t+12}{10}, \frac{-45t+18}{10} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{15t+18}{10}, \frac{-30t+12}{10}, \frac{-45t+18}{10}, t \right)$$

con t parametro reale ($t \in \mathbb{R}$).

4) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Poiché si è in presenza di un polinomio di quarto grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di polinomi di primo o di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, ovvero 3, sono esattamente $\pm 1, \pm 3$, essendo 3 un numero primo. Ma allora si ha:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x=+1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 2 + 3 - 2 - 3 = 0$$

cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 3 & -2 & -3 \\ +1 & & 2 & 5 & +3 \\ \hline & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 3)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2} \text{ ed } x_2 = \frac{-5+1}{4} = -1$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 1)$$

da cui:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 3) = (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 1)$$

Risulta ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -3) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

sostituendo, in y , al posto della x il valore 0

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} = -1,5 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0); C = \left(-\frac{3}{2}, 0\right); D = (-1, 0) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

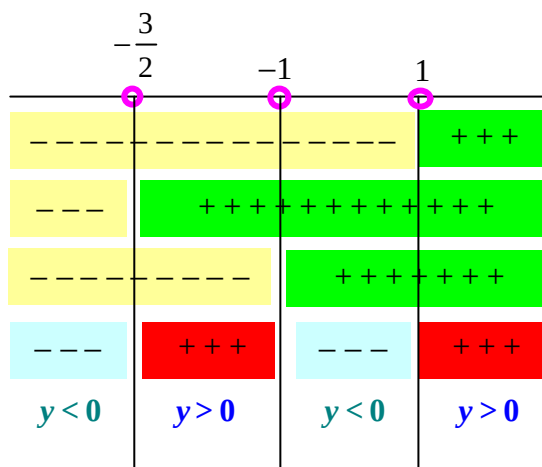
I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+\frac{3}{2} > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x > -1 \end{cases}$$



Dunque si ha:

$$y > 0 \text{ per } -\frac{3}{2} < x < -1, x > 1$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D(2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) = 6x^2 + 6x - 2$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 2 > 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 1 > 0$$

dividendo per 2

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A

02/05/2006

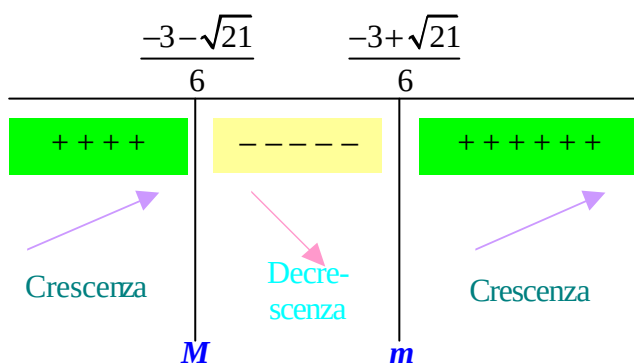
A.A. 2005 – 2006

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \cong -1,26 \text{ ed } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \cong 0,26$$

da cui:

$$3x^2 + 3x - 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \text{ ed } x > \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$ ed un minimo in $x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}$.

In particolare:

$$x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \Rightarrow y = 2 \left(\frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \right)^3 + 3 \left(\frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \right)^2 - 2 \left(\frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \right) - 3 \cong 0,28$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \Rightarrow y = 2 \left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \right)^3 + 3 \left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \right)^2 - 2 \left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \right) - 3 \cong -3,28$$

Ne segue, quindi, che:

M (−1,26;0,28) è il punto di *Massimo*

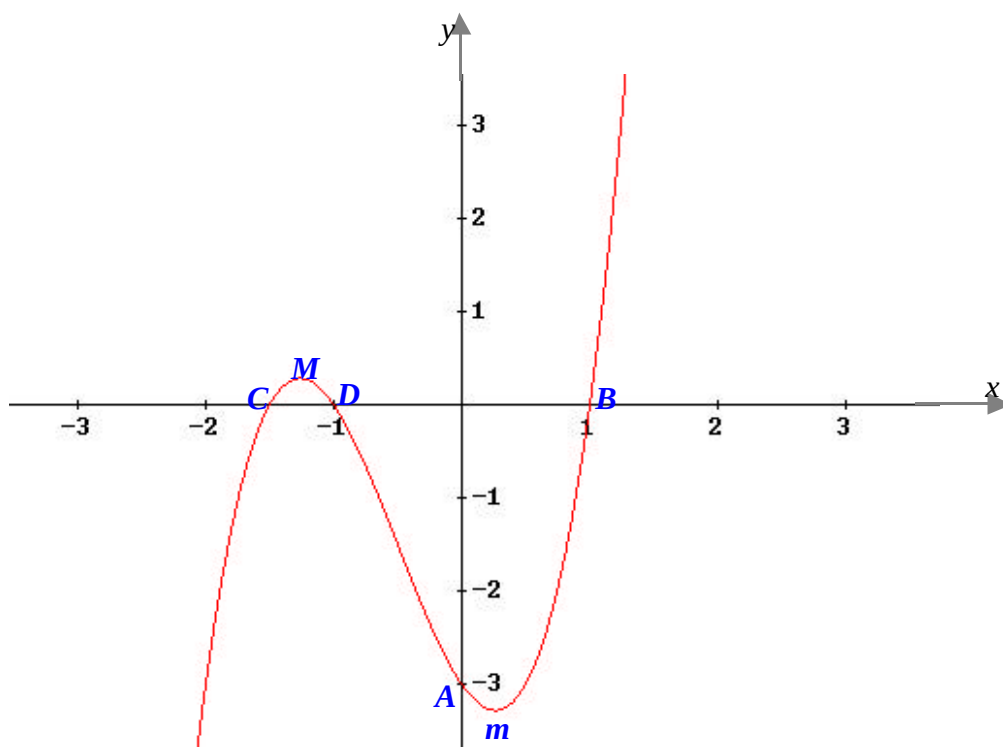
m (0,26;−3,28) è il punto di *minimo*

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO



Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

5) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2}$$

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 \neq 0\}$$

Occorre, pertanto, trovare le soluzioni dell'equazione associata a tale disuguaglianza. Risulta:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

motivo per cui, essendo $\Delta < 0$, l'equazione non è mai soddisfatta, ovvero la disuguaglianza è sempre soddisfatta. Ne segue, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} = -1,5 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \approx -1,22 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}} \approx +1,22 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right); C = \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

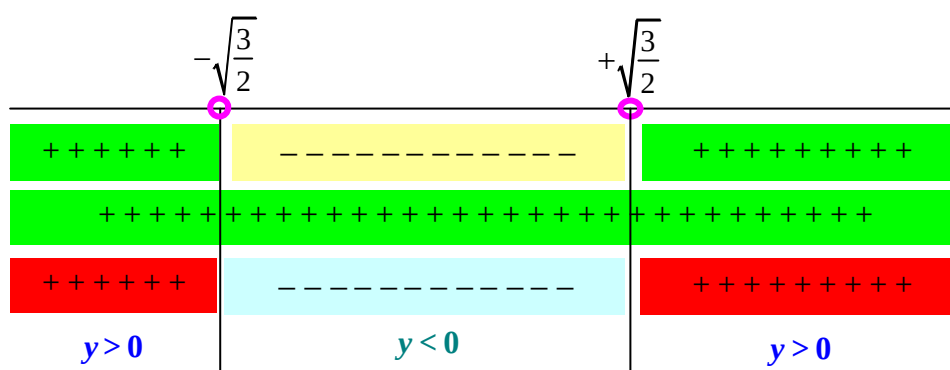
Prof.ssa Daniela Tondini

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{\frac{3}{2}}, x > +\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \text{sempre } (\Delta < 0) \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \text{ per } x < -\sqrt{\frac{3}{2}}, x > +\sqrt{\frac{3}{2}}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$$

cioè la retta di equazione $y = 2$ è un asintoto orizzontale per la funzione:

$$AO.: y = 2$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D\left(\frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2}\right) = \frac{(4x) \cdot (x^2 - 2x + 2) - (2x^2 - 3) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 - 8x^2 + 8x - 4x^3 + 4x^2 + 6x - 6}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{-4x^2 + 14x - 6}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
 CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

da cui segue:

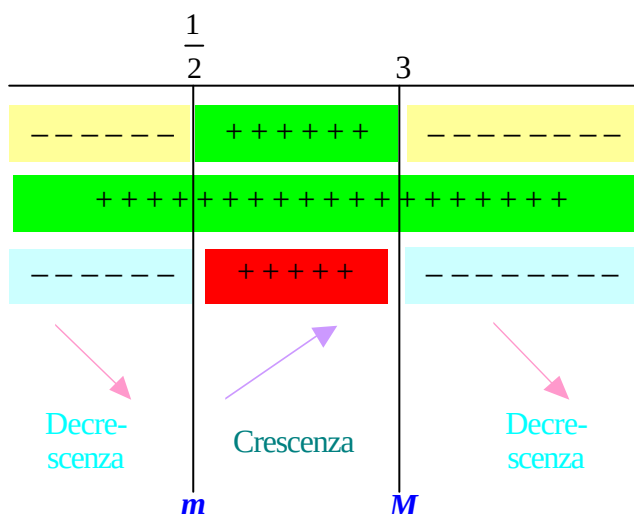
$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-4x^2 + 14x - 6}{(x^2 - 2x + 2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x^2 + 14x - 6 > 0 \\ (x^2 - 2x + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 14x + 6 < 0 \\ (x^2 - 2x + 2)^2 > 0 \end{cases}$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 14x - 6 = 0 &\Rightarrow 4x^2 - 14x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \text{ ed } x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \end{aligned}$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 14x + 6 < 0 \\ (x^2 - 2x + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 3 \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un minimo in $x = \frac{1}{2}$ ed un massimo in $x = 3$.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

In particolare si ha:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2} = -2$$

$$x = 3 \Rightarrow y = \frac{2(3)^2 - 3}{(3)^2 - 2(3) + 2} = 3$$

Ne segue, quindi, che:

$m\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ è il punto di *minimo*

$M(3;3)$ è il punto di *Massimo*

Osservazione

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 2$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} = 2 \Rightarrow$$

(essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2} - 2 &= 0 \Rightarrow \frac{(2x^2 - 3) - 2(x^2 - 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 3 - 2x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x + 2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4x - 7}{x^2 - 2x + 2} &= 0 \Rightarrow 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4} \cong 1,75 \end{aligned}$$

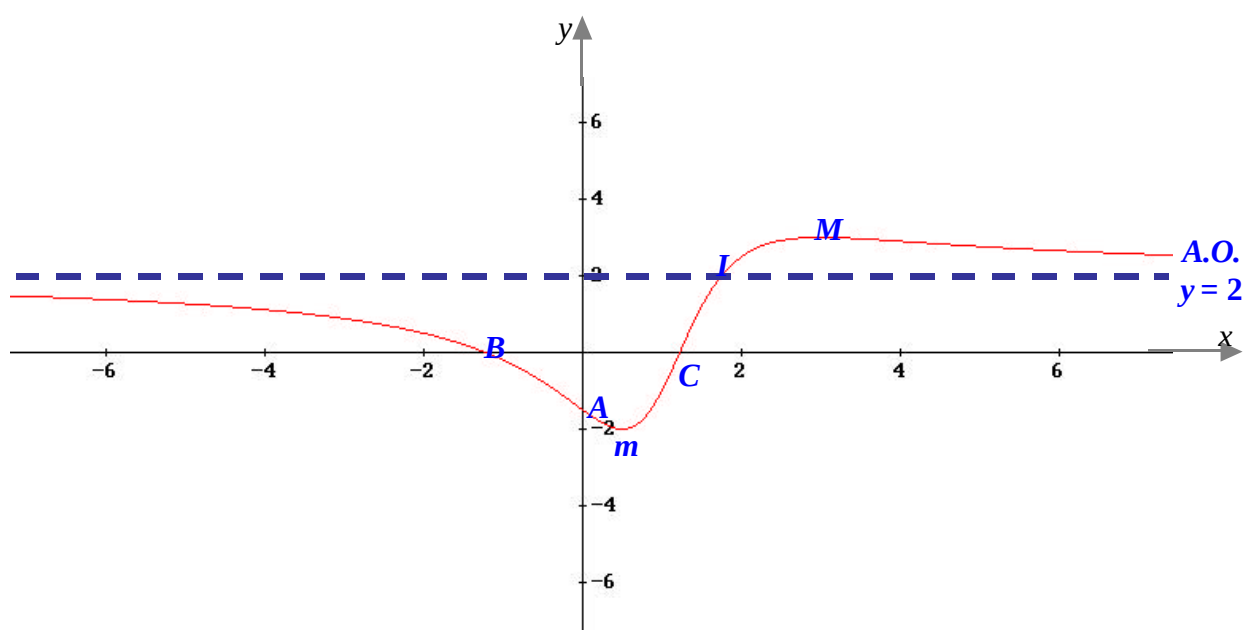
Dunque il punto di intersezione sarà $I = \left(\frac{7}{4}, 2\right)$.

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
02/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO



Prof.ssa Daniela Tondini